# Funkcije više promjenljivih

## Skupovi ~~ta~~ u ravni i u prostoru

### Okoline tačke u prostoru. Otvoreni i zatvoreni skupovi.

Sjetimo se nekih osobina prostora $\mathbb{R}^n$. $\mathbb{R}^n$ je skup svih n-torki $(x_1, x_2, .., x_n)$ koja se sastoji iz n-realnih brojeva $x_i$, $i=1,2,..,n$. Svaka n-torka označava $X=(x_1,x_2,..,x_n)$ tačku iz prostora $\mathbb{R}^n$, a $x_i$ – i-ta koordinata te tačke.
Rastojanje između dvije tačke $X=(x_1,x_2,..,x_n)$ i $Y=(y_1,y_2,..,y_n)$ tog prostora se definiše jednakošću:

$$\rho(X,Y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+..+(x_n-y_n)^2} \qquad (1)$$

Ovo je uopštenje formule $\rho(X,Y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ rastojanja između tačaka $X=(x_1,x_2)$, $Y=(y_1,y_2)$ iz ravni i formule $\rho(X,Y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$ rastojanja između tačaka $X=(x_1,x_2,x_3)$ i $Y=(y_1,y_2,y_3)$ iz pr-ra $\mathbb{R}^3$. Skup $\mathbb{R}^n$ sa ovim rastojanjem između dvije tačke naziva se metričkim pr-rom $\mathbb{R}^n$.
Metrički prostor možemo razmatrati kao vektorski prostor, ako za njegove elemente (vektore) $X=(x_1,x_2,..,x_n)$ i $Y=(y_1,y_2,y_3,..,y_n)$ jednakost se definiše

$$X=Y \iff (x_1=y_1, x_2=y_2, .., x_n=y_n),$$

suma $X+Y=(x_1+y_1, x_2+y_2, .., x_n+y_n)$

i proizvod $\alpha X$, $\alpha\in\mathbb{R}$ jednakošću $\alpha X=(\alpha x_1,\alpha x_2,..,\alpha x_n)$
Ako u $\mathbb{R}^n$ izaberemo ortonormiranu bazu i koordinatni početak $O$, to u $\mathbb{R}^n$ dobijemo koordinatni sistem koji se javlja uopštenjem Dekartovih ~~sistema~~ koordinatnih sistema $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$.
Skalarni proizvod u $\mathbb{R}^n$ se definiše

$$(X,Y)=x_1y_1+x_2y_2+..+x_ny_n$$

Pritom norma (dužina) vektora $X\in\mathbb{R}^n$ se definiše sa

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+..+x_n^2},$$

a rastojanje između vektora $X$ i $Y$:

$$\rho(X,Y)=\|X-Y\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$ što se poklapa sa formulom (1)

Neka je $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ tačka iz nekog skupa $D \subset \mathbb{R}^n$.
Skup tačaka $x$ skupa $D$, takvih da je $\rho(X, X^0) < \varepsilon$ nazivamo $\varepsilon$-okolinom tačke $x^0$ i označavamo sa $U_\varepsilon(x^0)$. To znači da je po definiciji:

$$U_\varepsilon(x^0) = \{X \in D \subset \mathbb{R}^n \mid \rho(X, X^0) = \|X - X^0\| < \varepsilon\} \qquad (2)$$

Skup (2) se naziva $n$-dimenzionalnom loptom poluprečnika $\varepsilon$ s centrom u tački $x^0$. Okolina $\dot{U}_\varepsilon(x^0) = U_\varepsilon(x^0) \setminus X^0$ je okolina tačke $x^0$ bez same tačke $x^0$.

Za $n=2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $X^0 = M_0 = (x_0, y_0)$

$$U_\varepsilon(M_0) = \{(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \varepsilon\}$$ – krug radijusa $\varepsilon$ s centrom u $M_0$

$n=3$ $$U_\varepsilon(M_0) = \{(x,y,z) \in D \subset \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < \varepsilon\}$$ lopta polupr. $\varepsilon$ s centrom u $M_0$.


Uvedimo pojmove otvorenog i zatvorenog skupa. Tačka $M_0 \in D$ je unutrašnja tačka skupa $D$ ako ona pripada skupu $D$ zajedno sa nekom svojom $\varepsilon$-okolinom tj $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(M_0) \subset D$. (slika)

Skup $D$ se naziva otvorenim ako je svaka njegova tačka unutrašnja tj za svaku tačku $M_0 \in D$ $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(M_0) \subset D$.

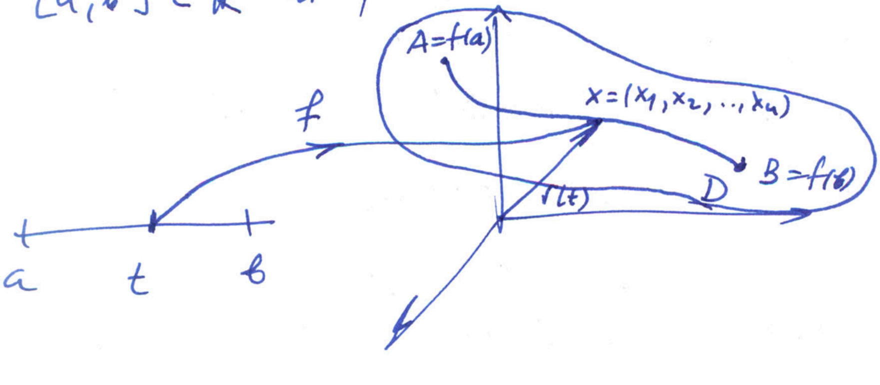
Graničnom tačkom skupa $D$ naziva se tačka takva da svaka njena okolina sadrži beskonačno mnogo tačaka iz skupa $D$.

Unija skupa $D$ i skupa svih njegovih graničnih tačaka naziva se zatvorenjem skupa $D$ i označava sa $\overline{D}$.

Skup $D$ je zatvoren ako se on poklapa sa svojim zatvorenjem tj ako je $D = \overline{D}$. Granica skupa $D$ je skup $\overline{D} \setminus D$.

Povezani i ograničeni skupovi

Neprekidnim putem u $\mathbb{R}^n$ nazivamo neprekidnu sliku intervala $[a,b] \subset \mathbb{R}^1$ u prostor $\mathbb{R}^n$.



Skup $D \subset \mathbb{R}^n$ se naziva povezanim ako za svaki njegov par tačaka $A$ i $B$ postoji neprekidni put s početkom u $A$ i krajem u $B$ koji cio pripada skupu $D$.

Skup $D$ je konveksan ako se svake njegove dvije tačke mogu spojiti ~~duž~~ pomoću duži koja cijela pripada skupu $D$.

Očigledno, konveksni skupovi su povezani skupovi.

Povezani skupovi su skupovi koji se sastoje iz jednog "~~parčeta~~" "komada".

Povezani skupovi su krug, kugla, prsten, tor itd.

Ako je granica skupa povezan skup to je tada skup jednopovezan.

Skup se naziva $n$-povezanim ako se njegova granica sastoji iz $n$-disjunktnih povezanih skupova.

Npr. okolina $U_\varepsilon(M_0)\setminus M_0$ je dvopovezan skup


Otvoren, povezan skup se naziva oblast.
Skup $D$ je ograničen ako postoji lopta konačnog poluprečnika $R$, koja sadrži u cjelosti skup $D$. Veličina $d = \sup\limits_{x,y\in D} \rho(x,y)$ se naziva dijametrom skupa $D$.

## Pojam granične vrijednosti u $\mathbb{R}^n$.

Niz $\{X^{(m)}\} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$ elemenata iz $\mathbb{R}^n$ se naziva konvergentnim ka $X^0 \in \mathbb{R}^n$ ako $\forall \varepsilon > 0$ postoji $N$, takav da za svako $m \geq N$, važi da je $\rho(X^{(m)}, X^0) < \varepsilon$.

Pišemo $\lim\limits_{m\to\infty} X^{(m)} = X^0$.

$$\lim_{m\to\infty} X^{(m)} = X^0 \iff \lim_{m\to\infty} \rho(X^{(m)}, X^0) = 0.$$

**Teorema** Niz $X^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$ konvergira ka tački $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ ako i samo ako $\lim\limits_{m\to\infty} x_i^{(m)} = x_i^0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

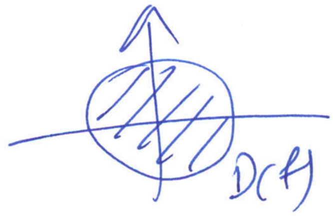
## Pojam funkcije više promjenljivih

Neka je $D$ = skup tačaka $M = (x,y)$ iz ravni. Preslikavanje ~~Pravilo~~ $f$ koje svakoj tački $(x,y) \in D$ pridružuje broj $z$ naziva se funkcijom dvije promjenljive i označavamo je sa $z = f(x,y)$ ili $z = f(M)$.
Skup $D$ je oblast definisanosti funkcije i označavamo ga sa $D(f)$.
Broj $z = f(M)$ ili $z = f(x,y)$ vrijednosti fje $f$ u tački $M = (x,y)$.
Skup $E(f) = \{z \in \mathbb{R} \mid z = f(x,y), (x,y) \in D\}$ nazivamo skupom vrijednosti funkcije $f$.

Primjer 1) $f: (x,y) \mapsto x+y$ $\quad f(x,y) = x+y$ $\quad D(f)=\mathbb{R}^2,\ E(f)=\mathbb{R}$

2) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ $\quad \cancel{f(x,y)=}\ D(f)=\{(x,y)\mid 1-x^2-y^2\geq 0\}$ tj.

$E(f)=[0,1]$ $\quad D(f)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$ krug



Analogno $u=f(x,y,z)$ fja tri nezavisne promjenljive

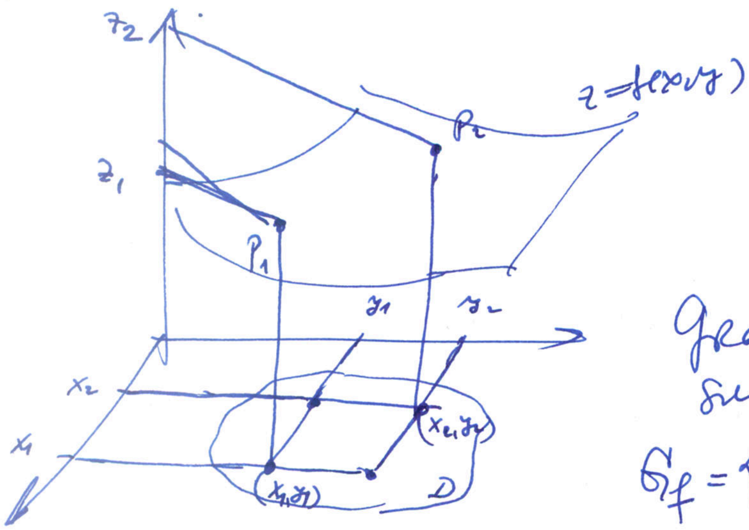
$f:(x,y,z)\mapsto u$. $\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ u\in\mathbb{R}$.

Slično, $f:(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mapsto u$, $\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R}$.

$M(x,y,z(x,y))$ - površ gornja polusfera

dolje (x)

Kao i u slučaju jedne promjenljive i funkcije dvije promjenljive možemo predstaviti grafički. U svakoj tački $(x,y)\in D$ izračunamo vrijednost $z=f(x,y)$. Tada trojka $(x,y,z)=(x,y,f(x,y))$ u sistemu koordinata $XYZ$ definiše neku tačku $P$. Skup tačaka $P$ obrazuje grafik fje $G_f$ koji predstavlja neku površ u prostoru $\mathbb{R}^3$.




Primjer Grafikom funkcije $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ je gornja polusfera s centrom u $O$ poluprečnika 1.

Primjer $z=Ax+By+D$ je ravan

Grafik fje $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ je skup

$$G_f=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)\mid u=f(x_1,\ldots,x_n),\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D\}$$

# Granična vrijednost f-je u tački

**Definicija** (Košijeva). Neka je f-ja $z=f(x,y)$ definisana u nekoj okolini tačke $M_0=(x_0,y_0)\in D$, bez tačke $M_0$. Broj $A$ se naziva graničnom vrijednošću f-je $f$ u tački $M_0$ (po Košiju) ako za svako $\varepsilon>0$ postoji $\delta>0$ takvo da za sve tačke $M=(x,y)$ iz okoline $U_\delta(M_0)$ $M\neq M_0$, važi nejednakost $|f(M)-A|<\varepsilon$

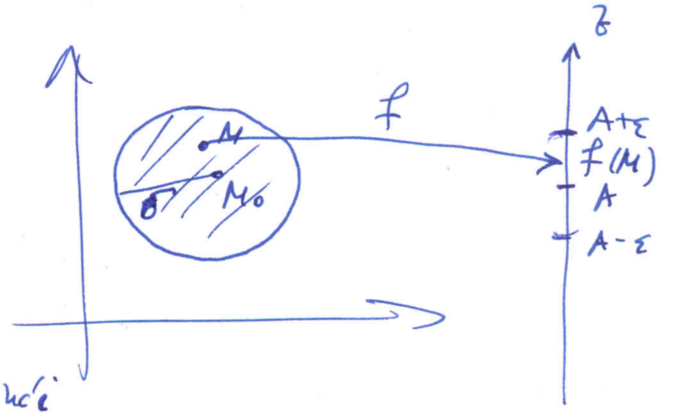
Broj $A$ je granična vrijednost f-je $f(x,y)$ u tački $M_0(x_0,y_0)$ i to zapisujemo:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \quad \text{ili} \quad \lim_{M\to M_0} f(M)=A.$$

Jezikom kvantifikatora našu definiciju možemo zapisati:

$$\left(\lim_{M\to M_0} f(M)=A\right) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall M\in U_\delta(M_0)): |f(M)-A|<\varepsilon$$

Geometrijski f-ja $f$ preslikava tačke $M$ iz okoline $U_\delta(M_0)$ u tačke okoline $U_\varepsilon(A)$




**Definicija** (Hajne) Broj $A$ se naziva graničnom vrijednošću f-je $f$ u tački $M_0$, ako za svaki niz $\{M_n\}$, koji konvergira ka $M_0$, $M_n\neq M_0$, odgovarajući niz $\{f(M_n)\}$ vrijednosti f-je $f$ konvergira k $A$.

Ako za neke nizove $\{M_n'\}$ i $\{M_n''\}$ koji konvergiraju k $M_0$, granične vrijednosti $\{f(M_n')\}$ i $\{f(M_n'')\}$ ne postoje ili ~~imaju različite~~ su različite to znači da u $M_0$ f-ja $f$ nema graničnu vrijednost.

**Primjer** Da li f-ja $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ ima graničnu vrijednost u tački $O=(0,0)$

**Rješenje** Neka $M(x,y)$ teži ka $O$ po osi $X$ tj. $M=(x,0)$

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0}{x^2+0^2}=0$$

Analogno, kad $M$ teži $O$ duž $Y$ ose $\Rightarrow$ $M=(0,y)$

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{0\cdot y}{0^2+y^2}=0$$

Neka sada $M$ teži u $O$ duž prave $y=kx$ tj. $M=(x,kx)$ $k\neq 0$

$$\lim_{(x,kx)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{k\,x^2}{k^2x^2+x^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

Slijedi da kad $(x,y)\to(0,0)$ duž raznih pravaca ima razne gran. vr. $\Rightarrow$ $f$ nema GV u $(0,0)=O$.

Sva svojstva graničnih vrijednosti koja smo dokazivali u slučaju jedne promjenljive važe i ovdje tj.

1° $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A$, $\lim\limits_{M\to M_0} g(M)=B$ to je tada

$$\lim_{M\to M_0} [f(M)\pm g(M)] = A\pm B$$

$$\lim_{M\to M_0} f(M)\cdot g(M) = A\cdot B$$

$$\lim_{M\to M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{A}{B} \quad (B\neq 0$$

2° Ako $f$ ima u $M_0$ graničnu vrijednost to postoji okolina tačke $M_0$ u kojoj je $f$ ograničena

3° Ako je $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A>0$ $(A<0)$ to postoji okolina tačke $M_0$ takva da je za sve tačke te okoline $f(M)>0$ $(f(M)<0)$.

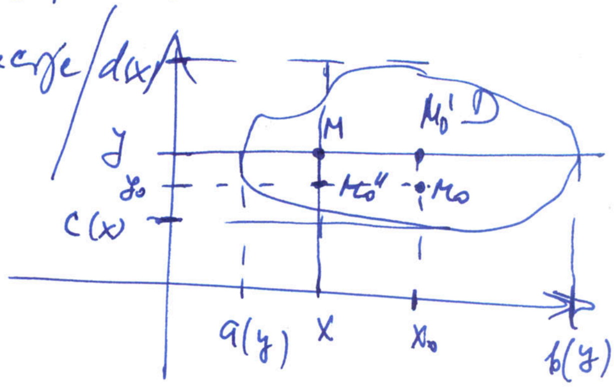
## Uzastopne granične vrijednosti

Definicija granične vrijednosti fje $z=f(x,y)$ u tački $(x_0,y_0)$ podrazumijeva da $x$ teži k $x_0$ nezavisno od toga kako $y$ teži k $y_0$ samo je potrebno da bi tačka $(x,y)$ pripadala oblasti definisanosti fje $D(f)$.

Ako fiksiramo ~~fju~~ promjenljivu $y$, to je tada $f(x,y)$ fja jedne promjenljive $x$, gdje je $x\in[a(y),b(y)]$

Tada se može postaviti pitanje egzistencije/d(x)/ granične vrijednosti

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y)=A(y).$$




koja je fja od $y$.

~~granična~~ Prelaz na lim znači da se tačka $M$ po pravoj $y=\text{const}$ teži ka tački $M_0'=(x_0,y)$

Zatim možemo isto tako da postavimo pitanje o egzistenciji

$$\lim_{y\to y_0} A(y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

Ovo nazivamo uzastopnom graničnom vrijednošću.

Analogno, uvodi se uzastopna gran. vrijednost

$$\lim_{x\to x_0} B(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y), \text{ gdje je } B(x)=\lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

Znači uzastopni limesi odražavaju fakt kada tačke $M=(x,y)$ teži k tački $M_0(x_0,y_0)$ po stranama ~~pravougaonika~~ $MM_0'M_0M_0''$ koje su paralelne koordinatnim osama.

Naravno, uzastopne granične vrijednosti nisu uvijek jednake.

Primjer $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ u $(0,0)$

Rješ.

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2}=-1$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1$$

Vidjeli smo u primjeru $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ u $(0,0)$ uzastopne gran. vrijednosti postoje i

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=0$$

No sama granična vrijednost u $(0,0)$ te fje $f(x,y)$ ne postoji.

Teorema Ako postoji ~~uzastopna~~ gran. vrij. fje $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ i za svako $y$ postoji konačna gran. vrijednost $\lim_{x\to x_0} f(x,y)=A(y)$ to tada postoji i uzastopna granična vrijednost

$$\lim_{y\to y_0} A(y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) \text{ i jednaka je } A.$$

## Neprekidnost funkcije više promjenljivih

Definicija Fja $z=f(x,y)$ se naziva neprekidnom u tački $M_0=(x_0,y_0)$ ako je njena granična vrijednost u tački $M_0$ jednaka vrijednosti fje u toj tački tj. ako

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0) \quad \text{ili} \quad \lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$$

Jezikom kvantifikatora

$$\left(\lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)\right) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\left(\forall M\in U_\delta(M_0)\right)\ |f(M)-f(M_0)|<\varepsilon$$

Fja neprekidna u svakoj tački oblasti D se naziva neprekidnom u oblasti D. Tačke u kojima fja nije definisana ili nije neprekidna se nazivaju tačkama prekida.

Primjer $z=\dfrac{1}{9x^2-4y^2}$, tačke prekida obrazuju skup tačaka sa ravni XY koje su def. jednakošću $9x^2-4y^2=0$ tj. tačke pravih $y=\pm\frac{3}{2}x$.

Razmotrimo sada priraštaje $\Delta x$ i $\Delta y$ promjenljivih $x$ i $y$ tako da $M=(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in D$. ~~Fja~~ $z=f(x,y)$ dobija puni priraštaj u $M_0$. Tada je priraštaj fje $z=f(x,y)$ u $M_0$ jednak

~~$\Delta z(M_0) =$~~

$$\Delta z(M_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y) = f(M) - f(M_0)$$

Tada neprekidnost fje $f$ u tački $M_0$ možemo definisati kao

$$\left(\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z(M_0) = 0\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall |\Delta x|<\delta, |\Delta y|<\delta): |f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

Neka je $M_0=(x_0,y_0)$, a $M=(x_0+\Delta x, y_0)$ $(M=(x_0, y_0+\Delta y))$ tada parcijalne priraštaje fje $f(x,y)$ po $x$ (po $y$) u tački $M_0$ definišemo

$$\Delta_x z(M_0) = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

$$\Delta_y z(M_0) = f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Neprekidnost fje $f$ po promjenljivoj $x$ (po $y$) u tački $M_0=(x_0,y_0)$ se tada definiše

$$\left(\lim_{\Delta x\to 0} \Delta_x z(M_0) = 0\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall |\Delta x|<\delta): |f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

$$\left(\lim_{\Delta y\to 0} \Delta_y z(M_0) = 0\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall |\Delta y|<\delta): |f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Iz neprekidnosti fje $f(x,y)$ u tački $M_0$ slijedi njena neprekidnost po svakoj od promjenljivih $x$ i $y$. Obratno ne važi.

Primjer Razmotrimo fju $z = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Pokazano je da je $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = 0$, ima ~~parcijalne~~ granične vrijednosti ~~po~~ $x$ i po $y$.

No ova fja nije neprekidna u $(0,0)$.

Svojstva

1° $f$ i $g$ neprekidne u $M_0 \Rightarrow f\pm g, f\cdot g, f/g$ $(g(M_0)\neq 0)$ neprekidne u $M_0$

2° Neprekidnost složene funkcije.

Neka je $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ - složena fja gdje je $x_1=\varphi_1(t_1,t_2,\dots,t_m)$, $x_2=\varphi_2(t_1,t_2,\dots,t_m)$, ..., $x_n=\varphi_n(t_1,t_2,\dots,t_m)$. Ako su funkcije $x_i=\varphi_i(t_1,t_2,\dots,t_m)$ $i=1,2,\dots,n$, neprekidne u tački ~~$M_0=(x_1(t^0), x_2(t^0),\dots,x_n(t^0))$~~. $t^0=(t_1^0,t_2^0,\dots,t_m^0)$, a fja $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ neprekidna u tački $M_0=(x_1(t^0), x_2(t^0),\dots,x_n(t^0))$, to je tada i složena fja $u=f(x_1(t_1,\dots,t_m), x_2(t_1,\dots,t_m),\dots,x_n(t_1,\dots,t_m))$ neprekidna u tački $t^0$.

3. Ako je $u=f(M)$ neprekidna u $M_0$ i $f(M_0)\neq 0$ onda postoji $\delta$- okolina tačke $U_\delta(M_0)$ takva da za sve $M\in U_\delta(M_0)$, znak vrijednosti $f(M)$ je isti kao i znak $f(M_0)$

4. Ako je funkcija $u=f(M)$ neprekidna na povezanom skupu $D$ i $f(A)$ i $f(B)$ njene vrijednosti u tačkama $A$ i $B\in D$, onda za proizvoljno $\alpha\in[f(A), f(B)]$ postoji $C\in D$, takvo da je $f(C)=\alpha$.

5. Vajerštrasova teorema

Ako je $u=f(M)$ neprekidna na ograničenom i zatvorenom skupu $D\subset\mathbb{R}^n$, onda je ona ograničena na tom skupu i dostiže svoju najveću i najmanju vrijednost u nekim tačkama $M_1$ i $M_2$ iz tog skupa.

# Diferencijabilnost funkcija više promjenljivih

## Parcijalni izvodi

Neka je data fja tri promjenljive $u=f(x,y,z)$ definisana u oblasti $D$ i neka je $M_0(x_0,y_0,z_0)$ neka tačka te oblasti. Fiksirajmo vrijednosti $y$ i $z$, pretpostavljajući da je $y=y_0$ i $z=z_0$. U rezultatu dobijamo fju $u=f(x,y_0,z_0)$ jedne promjenljive $x$. Ako je ta fja za $x=x_0$ diferencijabilna, odnosno, ako postoji konačna granična vrijednost

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u(M_0)}{\Delta x}$$

onda tu graničnu vrijednost nazivamo parcijalnim izvodom fje $u=f(x,y,z)$ po promjenljivoj $x$ u tački $M_0(x_0,y_0,z_0)$ i označavamo ga sa

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0} \text{ ili } \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \text{ ili } \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \text{ ili } f'_x(M_0).$$

Znači,
$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u(M_0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x}$$

Analogno definišemo i parcijalne izvode po promjenljivim $y$ i $z$, tj.

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y u(M_0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta_z u(M_0)}{\partial z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta z}$$